

**Tentamen Algoritmen en Datastructuren**  
**19 augustus 2004**

Tijdsduur 3 uur. Voorzie alle in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Werk netjes, formuleer scherp en zorgvuldig. Schrijf duidelijk leesbaar.

**Opgave 1** (25%). (a) Beschrijf het algoritme “randomized quickSelect” dat, gegeven een rij  $S$  van  $n$  vergelijkbare elementen en een getal  $k$  met  $1 \leq k \leq n$ , het  $k$ -de element oplevert van de rij die bij het sorteren van rij  $S$  zou ontstaan. De verwachte complexiteit van je algoritme dient lineair in  $n$  te zijn.

(b) Maak deze complexiteit aannemelijk.

**Opgave 2** (25%). (a) Gegeven is een gewogen gerichte graaf  $G$  met  $n$  knopen en  $m$  pijlen. Het gewicht van een pijl  $(x, y)$  is  $w(x, y)$ . Het gewicht van een gericht pad van een knoop  $x$  naar een knoop  $y$  is de som van de gewichten van de pijlen van het pad. Een pad heet simpel als het geen knoop meer dan één keer aandoet. De afstand van  $x$  naar  $y$  is het kleinste gewicht van de gerichte simpele paden van  $x$  naar  $y$ , en  $+\infty$  als er geen simpel pad van  $x$  naar  $y$  is. Geef een algoritme ter bepaling van alle afstanden in de graaf.

(b) Bepaal de complexiteit van dit algoritme.

**Opgave 3** (25%). De knopenverzameling  $V$  van een ongerichte graaf  $G$  is verdeeld over twee disjuncte verzamelingen  $X$  en  $Y$ , dwz  $V = X \cup Y$  en  $X \cap Y = \emptyset$ . Elke ribbe van de graaf verbindt  $X$  en  $Y$ , dwz voor elke ribbe  $(p, q)$  met  $p \in X$  geldt  $q \in Y$ . Een *matching* is een verzameling van ribben, die twee aan twee disjunct zijn. Een matching heet *maximaal* als hij zo veel mogelijk ribben bevat.

Geef aan hoe een maximale matching bepaald kan worden met behulp van een algoritme ter bepaling van de maximale flow in een flow-netwerk. Je hoeft dit laatste algoritme dus niet te geven, maar je moet wel aangeven, wat een flow-netwerk is, welk flow-netwerk je bij de gegeven graaf nodig hebt, en hoe je het gebruikt.

**Opgave 4** (25%). De invoer bestaat uit een rij van  $n$  onderling verschillende reële getallen  $z_0, \dots, z_{n-1}$ . Gevraagd: de rij van coëfficiënten  $a_0, \dots, a_{n-1}$  van de unieke polynoom  $p(x)$  van de vorm  $p(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$  van de graad  $n$  die 0 is in alle punten  $z_i$ . Je hoeft de invoer niet te controleren.

(a) Geef hiertoe een verdeel- en heersalgoritme. Het dient een tijdscomplexiteit  $\mathcal{O}(n \log^2 n)$  te hebben.

(b) Laat zien dat je algoritme de gewenste efficiëntie heeft.